

LXI Київська міська олімпіада юних математиків

Розв'язки та вказівки

7 клас

1. Чи є простим число $(1 + 2 + 3 + \dots + 2004 + 2005)^{2006} + (1 + 2 + 3 + \dots + 2005 + 2006)^{2005}$?

Розв'язок. Це число ділиться на 2, бо вирази в дужках відрізняються на 2006, а отже мають однакову парність.

2. На площині задано точки A, B, C такі, що $0 < AB \leq AC \leq BC = 1$. При якому розташуванні цих точок сума відстаней між ними набуває

а) найбільшого можливого значення; б) найменшого можливого значення?

Розв'язок. а) Якщо точки A, B, C є вершинами правильного трикутника, то сума відстаней набуває значення 3, оскільки $AB = AC = BC$. Очевидно, що це найбільше можливе значення. б) Нехай точка A лежить на відрізку BC . Тоді шукана сума дорівнює $AB + AC + BC = 2BC = 2$. Це найменше можливе значення, оскільки якщо точка A не лежить на відрізку BC , то $AB + AC > BC = 1$, а тому й $AB + AC + BC > 2BC = 2$.

3. Чи існує 11-значне число, яке має таку властивість: якщо до нього додати 11-значне число, яке записане тими само цифрами, але у зворотному порядку, то всі цифри суми будуть непарними?

Розв'язок. Існує, наприклад 60606090909. Якщо до нього додати 90909060606, то сума буде дорівнювати 151515151515 — усі цифри непарні.

4. Є 9 карток з написаними на них числами $1, 2, 3, \dots, 9$. Двоє гравців по черзі беруть якусь ще не використану картку та кладуть її на стіл. Якщо після чергового ходу одного з гравців сума чисел на картках, які вже лежать на столі, є непарною, то один бал одержує перший гравець, а якщо парною, то другий. Кожен гравець прагне набрати якнайбільше балів. Яку найбільшу кількість балів може набрати перший гравець при правильній грі?

Розв'язок. Замінімо числа $1, 2, \dots, 9$ на $1, 0, \dots, 1$ (5 одиниць та 4 нуля). Покажемо, що перший гравець може грати так, щоб набрати 7 балів. Нехай він почне з 1, а далі на хід другого гравця 1 відповідає 1, а на хід 0 відповідає 0. Тоді другий гравець отримає по балу двічі, а саме в моменти коли на столі опиняються друга та четверта картки з числом 1. Але в ці моменти сума стає парною при довільній грі гравців. Тому перший гравець не може набрати 8 балів. *Відповідь:* 7 балів.

8 клас

1. Розв'язати рівняння $\frac{(x-1)(x^2-2^2)(x^4-4^4)(x^8-8^8)}{x^2-6x+8} = 0$.

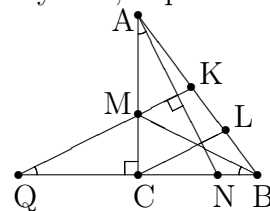
Розв'язок. Нулями чисельника є числа $1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, але з них треба виключити нулі знаменника, а саме числа 2 та 4. *Відповідь:* $1, -2, -4, \pm 8$.

2. Про натуральні числа a, b, c відомо, що $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2b+c} = \frac{1}{5b}$. Довести, що число $ac + 1$ не ділиться на 3.

Розв'язок. Позбавляючись від знаменників та зводячи подібні, отримаємо $ac = 3b(a+c) + 16b^2$. Отже, число $ac + 1$ дає таку само остачу від ділення на 3 як $b^2 + 1$, а тому не може ділитись на 3.

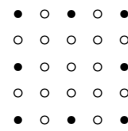
3. На катетах AC, BC прямокутного трикутника $\triangle ABC$ обрано точки M та N відповідно таким чином, що $\angle MBC = \angle NAC$. Перпендикуляри, опущені з точок M та C на пряму AN , перетинають AB в точках K та L відповідно. Довести, що $KL = LB$.

Розв'язок. Позначимо Q точку перетину MK та BC . Тоді $\angle MQC = 90^\circ - \angle CNA = \angle NAC = \angle MBC$. Отже, трикутник $\triangle QMB$ є рівнобедреним та його висота MC є медіаною, $QC = CB$. Оскільки $QK \parallel CL$, то за теоремою Фалеса маємо $KL = LB$.



4. На площині сидить декілька жуків. Назвемо точку відміченою, якщо вона є серединою деякого відрізка, в кінцях якого сидять жуки, але в самій точці не сидить жук. Чи може статися, що після прильоту ще одного жука кількість відмічених точок зменшиться?

Розв'язок. Покажемо, що таке можливо. Якщо вісім жуків сидять в чорних точках на малюнку, то відміченими будуть білі точки на малюнку та лише вони. Якщо ще один жук прилетить та сяде в центр квадрата, то відмічених точок стане на одну менше.



5. В країні гномів є 200 печер, деякі з яких сполучено тунелями. Починаючи з 1 січня 2006 року гноми кожен день засипають всі старі тунелі та риють нові тунелі між кожною парою печер, з яких напередодні виходила однакова кількість тунелів. В деяких N печерах живе по одному супергному. При якому найменшому N деякі два з них колись точно зможуть зустрітися?

Розв'язок. Назвемо групою декілька печер, попарно з'єднаних тунелями між собою, але не з'єднаних з жодною іншою печерою. Тоді при кожному $k \geq 0$ печери, з яких 31 грудня 2005 року можна було потрапити до рівно k печер, 1 січня 2006 року утворять групу. Легко бачити, що надалі жоден тунель не зникає та додаються нові за рахунок об'єднання груп з однаковою кількістю печер в них, поки не утворяться декілька груп з попарно різною кількістю печер. Якщо вже 31 грудня 2005 року існували групи з 1, 2, 3, ..., 18 та 29 печер, то 19 супергномів, які перебували в печерах з різних груп, ніколи не зустрінуться. З іншого боку, деякі з 20 супергномів рано чи пізно потраплять в одну групу та зможуть зустрітися, бо не може лишитись 20 чи більше груп. Справді, тоді в країні було б принаймні $1 + 2 + \dots + 20 = 210 > 200$ печер, а це не так. *Відповідь:* 20.

9 клас

1. Розв'язати рівняння $\frac{(x-1)(x^2-2^2)(x^4-4^4)(x^8-8^8)}{x^3-3x^2-6x+8} = 0$.

Розв'язок. Нулями чисельника є числа 1, ± 2 , ± 4 , ± 8 , але з них треба виключити нулі знаменника, а саме числа 1, -2 , 4. *Відповідь:* 2, -4 , ± 8 .

2. Про натуральні числа a, b, c відомо, що $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2b+4c} = \frac{1}{2c}$. Довести, що число $ab+bc+ac+1$ не ділиться на 3.

Розв'язок. Позбавляючись від знаменників та зводячи подібні, отримаємо $ab+ac+2b^2=4c^2$. Звідси $ab+bc+ac+1=4c^2+bc+1-2b^2=4c^2+4bc+b^2+1-3bc-3b^2=(2c+b)^2+1-3bc-3b^2$. Залишилось помітити, що число $(2c+b)^2+1$ не може ділитись на 3.

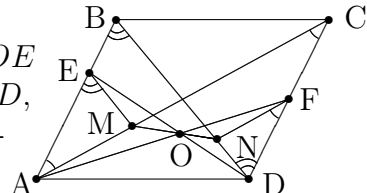
3. Натуральні числа, які мають непарну кількість дільників, пофарбували в жовтий колір, а натуральні числа, які мають парну кількість дільників, в блакитний. Чи існує таке натуральне число a , що всі числа вигляду $an+1$, $n \geq 1$ мають один колір?

Розв'язок. Зрозуміло, що непарну кількість дільників та жовтий колір матимуть точні квадрати й лише вони. Залишилось зауважити, що квадрати чисел не містять арифметичної прогресії, а кожна прогресія $an+1$ містить квадрати. Справді, при $n=a+2$ маємо $an+1=a(a+2)+1=(a+1)^2$.

Відповідь: не існує.

4. На сторонах AB та CD паралелограма $ABCD$ відмітили точки E та F відповідно. На його діагоналях AC та BD вибрали точки M та N таким чином, що $EM \parallel BD$ та $FN \parallel AC$. Довести, що прямі AF , DE та MN перетинаються в одній точці.

Розв'язок. Нехай O — точка перетину AF з DE . Тоді трикутники $\triangle AOE$ та $\triangle FOD$ подібні, $AO/AE = FO/FD$. Оскільки $\angle EAM = \angle ACD = \angle NFD$, $\angle AEM = \angle ABD = \angle NDF$, то трикутники $\triangle AEM$ та $\triangle FDN$ також подібні за двома кутами, $AM/AE = FN/FD$. Тому $\angle AMO = \angle NFO$ та $AO/AM = FO/FN$. Отже, трикутники $\triangle AOM$ та $\triangle FON$ подібні, $\angle AOM = \angle FON$ та точки M, O та N лежать на одній прямій.



5. Клітинки дошки 7×7 занумеровані в деякому порядку числами від 1 до 49. На одній з цих клітинок стоїть фішка. За один хід дозволяється пересунути її вліво, вправо, вгору або вниз на сусідню клітинку, яка має більший номер. Чи завжди можна а) щонайбільше за 28 ходів, б) щонайбільше за 30 ходів одержати позицію, в якій фішку вже не можна пересунути?

Розв'язок. а) Нехай клітинки занумеровані як на лівому малюнку (числа від 1 до 18 розставимо довільним чином) та фішка у початковій позиції стоїть на клітинці з номером 19. Тоді вона буде послідовно переходити відповідно правилам у клітинки з номерами 20, 21, ..., 49, а тому такі пересування будуть тривати не менше як 30 кроків. б) Розв'язок є аналогічним до розв'язку пункту

а) з використанням правого малюнка. Якщо спочатку фішка стоїть на клітинці з номером 17, то її пересування будуть тривати не менше як 32 кроки.

25	26	27		41	42	43
24		28		40		44
23		29		39		45
22		30		38		46
21		31		37		47
20		32		36		48
19		33	34	35		49

43	44	45		17	18	19
42		46	47			20
41	40		48		22	21
	39		49		23	
37	38				24	25
36		32	31	30		26
35	34	33		29	28	27

10 клас

1. Натуральні числа, які мають непарну кількість дільників, пофарбували в жовтий колір, а натуральні числа, які мають парну кількість дільників, в блакитний. Чи існує нескінченна арифметична прогресія, яка містить числа лише одного кольору?

Розв'язок. Зрозуміло, що непарну кількість дільників та жовтий колір матимуть точні квадрати та лише вони. Числа $4n + 2$ утворюють арифметичну прогресію та не є квадратами, тому всі вони мають парну кількість дільників та блакитний колір.

2. Розв'язати нерівність $\cos 3x + 2 \cos 2x + 3 \cos x + 2 \leq 0$.

Розв'язок. Оскільки $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ та $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, то нерівність набуває вигляду $4 \cos^2 x (\cos x + 1) \leq 0$. Але $\cos x + 1 \geq 0$, тому нерівність має місце лише у випадку рівності, тобто при $\cos x = 0$ або $\cos x = -1$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

3. Нехай функція f визначена на множині натуральних чисел, набуває натуральних значень та при всіх $n \geq 1$ задовольняє умову $2 + f(n + 1) = f(n) + (n + f(n))^2$. Довести, що якщо $f(1) \neq 1$, то $f(f(1))$ ділиться на $f(1) + 1$.

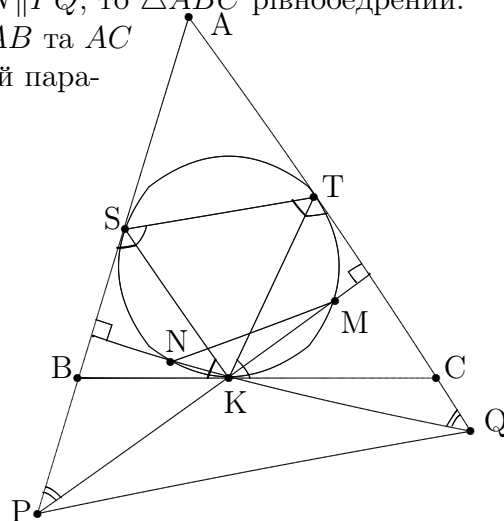
Розв'язок. Позначимо $a_n = f(n) + n$. Тоді $a_{n+1} + 1 = n + 2 + f(n + 1) = n + f(n) + (n + f(n))^2 = a_n + a_n^2 = a_n(a_n + 1) = a_n a_{n-1}(a_{n-1} + 1) = \dots = a_n a_{n-1} \dots a_1(a_1 + 1)$, а отже при всіх $n \geq 1$ число $a_{n+1} + 1$ ділиться на a_1 . Але $f(1) > 1$. Тому $a_{f(1)} + 1 = f(f(1)) + f(1) + 1$ ділиться на $a_1 = f(1) + 1$, звідки й випливає твердження задачі.

4. В гострокутний трикутник $\triangle ABC$ вписане коло ω , яке дотикається сторони BC в точці K . На прямих AB та AC вибрали точки P та Q відповідно так, що $PK \perp AC$ та $QK \perp AB$. Позначимо M та N точки перетину KP та KQ з колом ω . Довести, що якщо $MN \parallel PQ$, то $\triangle ABC$ рівнобедрений.

Розв'язок. Нехай S, T — точки дотику кола ω зі сторонами AB та AC відповідно. Внаслідок співвідношення між січною та дотичною й паралельності MN та PQ маємо

$$\frac{PS}{QT} = \frac{\sqrt{PK \cdot PM}}{\sqrt{QK \cdot QN}} = \frac{PK}{QK}.$$

Також помітимо, що $\angle SPK = \angle TQK = 90^\circ - \angle BAC$. Отже, трикутники $\triangle SPK$ та $\triangle TQK$ подібні, $\angle PSK = \angle QTK$. Тоді $\angle STK = \angle PSK = \angle QTK = \angle TSK$, а отже $SK = TK$. Оскільки $\angle BKS = \angle KTS = \angle KST = \angle CKT$, то маємо рівність трикутників $\triangle BKS = \triangle CKT$ за стороною та двома кутами. Тому $BS = CT$ та остаточно $AB = AS + SB = AT + TC = AC$.

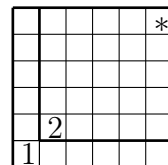


5. В деяких клітинках дошки $n \times n$, $n \geq 3$, стоїть по одній міні. Назвемо вагою клітинки кількість мін в ній та сусідніх з нею клітинках (клітинки є сусідніми, якщо мають спільну вершину). На початку гри ведучий дізнається про розташування мін та повідомляє гравцю вагу деяких n клітинок за власним вибором. Гравець має для кожної клітинки дошки сказати чи є там міна. Якщо він для деякої клітинки каже це невірно, то програє, а якщо вірно, то ведучий повідомляє йому вагу і цієї клітинки. Чи може гравець до початку гри так домовитись з ведучим, щоб точно не програти?

Розв'язок. Спочатку покажемо, що ведучий може повідомити гравцю інформацію про розташування мін в нижньому рядку та лівому стовпчику дошки. Нехай в утвореному ними куті t мін.

1) якщо $t \leq n$, то ведучий повідомить гравцю вагу клітинок з мінами та, можливо, деяких клітинок поза кутом, серед яких немає клітинки (*).

2) якщо $t > n$, то ведучий повідомить гравцю вагу клітинок без мін (їх щонайбільше $n - 2$) та деяких клітинок поза кутом, одна з яких — клітинка (*).



Якщо гравець знає розташування мін в зазначеному куті, то він може відновити розташування всіх мін. Справді, за числом в клітинці (1) він знайде чи є міна в клітинці (2) та аналогічно визначить чи є міни в інших клітинках, рухаючись зліва направо та знизу вгору.

11 клас

1. Дорога між містами А та Б спочатку йде під гору, а потім таку само відстань в гору. Мотоцикліст їде під гору вдвічі швидше, ніж в гору. Коли він проїхав весь шлях, то виявилось, що на перші 100 км шляху він витратив у півтора рази менше часу, ніж на останні 100 км. Яка відстань між містами А та Б?

Розв'язок. Позначимо відстань між містами $2S$ км, тоді мотоцикліст їде спочатку S км під гору, а потім S км в гору. Очевидно, що $S < 100$, бо інакше на перші 100 км шляху знадобилось би вдвічі менше часу, ніж на останні 100 км. Позначимо швидкість руху в гору v та складемо рівняння:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{S}{2v} + \frac{100 - S}{v} \right) = \frac{S}{v} + \frac{100 - S}{2v}, \text{ звідки } S = 80, \text{ а тому відстань між містами } 160 \text{ км.}$$

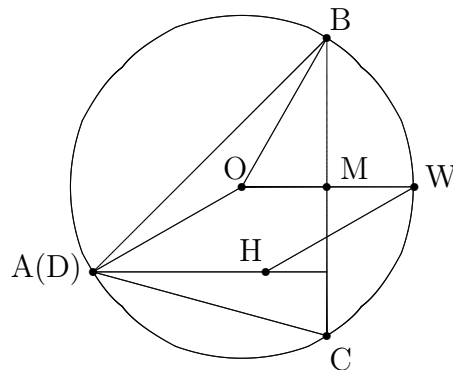
Відповідь: 160 км.

2. Розв'язати рівняння $2^{48^x} = 4^{8^{5^x}}$.

Розв'язок. Маємо $2^{48^x} = 2^{2 \cdot 8^{5^x}}$; $4^{8^x} = 2 \cdot 8^{5^x}$; $2^{2 \cdot 8^x} = 2^{3 \cdot 5^x + 1}$; $2 \cdot 8^x = 3 \cdot 5^x + 1$; $3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^x + \left(\frac{1}{8}\right)^x = 2$. Ліва частина останнього рівняння монотонно спадає, тому рівняння має щонайбільше один корінь. Легко бачити, що $x = 1$ задовольняє умову задачі, а тому це єдиний розв'язок. **Відповідь:** $x = 1$.

3. Нехай O — центр кола ω , описаного навколо гострокутного трикутника $\triangle ABC$, W — середина тієї дуги BC кола ω , що не містить точку A та H — точка перетину висот трикутника $\triangle ABC$. Знайти кут $\angle BAC$, якщо $WO = WH$.

Розв'язок. Відкладемо на промені HA відрізок $DH = R$, де R — радіус описаного кола $\triangle ABC$. Оскільки $OW \perp BC$, $AX \perp BC$ та $OW = WH = DH$, то $DOWH$ — ромб, $OD = R$. Тому D є точкою перетину кола ω з променем HA , тобто точки A та D співпадають, $AH = R$. Оскільки O є точкою перетину висот трикутника, утвореного середніми лініями трикутника $\triangle ABC$, то $OM = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}R$, де M — середина BC . Отже, в прямокутному трикутнику $\triangle BOM$ маємо $OM = \frac{1}{2}OB$ та $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOM = 60^\circ$. **Відповідь:** $\angle BAC = 60^\circ$.



4. Для додатних чисел x, y, z таких, що $xy + xz + yz = 1$, довести нерівність

$$\frac{x^3}{1 + 9y^2xz} + \frac{y^3}{1 + 9z^2yx} + \frac{z^3}{1 + 9x^2yz} \geq \frac{(x + y + z)^3}{18}.$$

Розв'язок. Позначимо $S = \frac{x^3}{1 + 9y^2xz} + \frac{y^3}{1 + 9z^2yx} + \frac{z^3}{1 + 9x^2yz}$. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського маємо $S \cdot (3 + 9(y^2xz + z^2yx + x^2yz)) \geq (x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2})^2$. За нерівністю трьох квадратів

$$3 + 9(xy \cdot yz + xz \cdot zy + xz \cdot yx) \leq 3 + 9 \cdot \frac{(xy + yz + xz)^2}{3} = 6,$$

тому $S \geq \frac{(x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2})^2}{6}$. Нарешті, за нерівністю Єнсена для опуклої функції $f(x) = x^{3/2}$ маємо

$$S \geq \frac{(x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2})^2}{6} \geq \frac{\left(3 \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{3/2}\right)^2}{6} = \frac{(x + y + z)^3}{18}.$$

5. У Кирила та Мефодія є енциклопедія з n томів, занумерованих числами $1, 2, \dots, n$. Ці томи стоять на полиці не обов'язково у порядку зростання номерів. Кирило рахує кількість K пар томів, у яких том, що стоїть лівіше, має більший номер. Мефодій для кожного тома знаходить модуль різниці номера цього тома та номера місця, на якому він стоїть, та обчислює суму M отриманих чисел. Наприклад, при розташуванні томів 2, 3, 5, 4, 1 маємо $K = 5$, бо неправильно стоять пари томів (2,1), (3,1), (5,4), (5,1) та (4,1), в той час як $M = |2 - 1| + |3 - 2| + |5 - 3| + |4 - 4| + |1 - 5| = 8$.

а) Довести, що при будь-якому розташуванні томів $K \leq 2M$.

б) Довести, що якщо томи стоять не у порядку зростання номерів, то $K \geq M + 1$.

Розв'язок. Будемо впорядковувати томи різними способами.

а) Візьмемо том з найбільшим номером серед тих, які ще не зайняли своє місце, та будемо міняти його місцями з сусіднім справа поки він не стане на своє місце. Потім таким само чином перемістимо на потрібне місце наступний том і так далі. При кожній перестановці пари сусідніх томів ми зменшуємо K рівно на 1 за рахунок саме цієї пари, бо переставляємо направо більший за номером том. При перестановці двох сусідніх томів ми для цих двох томів міняємо їх відстань від своїх місць на 1. Тому M може зменшитися щонайбільше на 2 та число $2M - K$ не зменшується. Повторюючи описані дії, ми прийдемо до правильного розташування томів, для якого $K = M = 0$, а отже $2M - K = 0$. Тому і для початкового розташування $2M - K \geq 0$, $2M \geq K$.

б) Розглянемо деяке розташування томів, яке не співпадає з правильним. Виберемо том, який має найменший номер з усіх, які ще не зайняли своє місце. Без обмежень загальності будемо вважати, що цей том має номер 1 та стоїть на a -му місці. Серед усіх томів, що займають місця з 1-го по $a - 1$ -те, виберемо том i з найбільшим номером. Нехай він стоїть на b -му місці, $b < a$. Поміняємо ці томи місцями. При цьому M зменшиться на $2(a - b)$, оскільки з вибору тому i впливає, що $i > a$, тобто обидва томи наближаються до своїх місць на $a - b$. Число K при цьому зменшиться рівно на $2(a - b) - 1$ за рахунок пари $(i, 1)$ та пар, які утворювали 1-й та i -ий томи з усіма $b - a - 1$ томами, що стоять між ними. Отже, на кожному кроці число $K - M$ зменшується на 1. Оскільки за декілька кроків ми отримаємо правильне розташування з $K = M = 0$, то для початкового розташування $K \geq M + 1$.

ЗАДАЧІ ЗАПРОПОНУВАЛИ: А. Анікушин (10.3), А. Батоговський (8.4, 8.5, 10.5), В. Брайман (8.2, 9.2), О. Клурман (8.3, 11.3, 11.4, 11.5), О. Рибак (11.5), Б. Рубльов (7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 9.5, 11.1), Т. Тимошкевич (9.3, 9.4, 10.1), С. Слободянюк (10.4, 11.2)