

Відбори команди Києва на Всеукраїнську олімпіаду юних математиків

В.Брайман, Д. Мітін, Б. Рубльов

Вже традиційно, учні 8 – 11 класів, що отримали на Київській міській олімпіаді з математики дипломи першого та другого ступенів, були запрошені на відбірково-тренувальні збори по підготовці до Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Склад команди Києва планувалось визначити за підсумками чотирьох відбіркових турів, в кожному з яких було запропоновано чотири задачі та надано чотири години на їх розв'язання. Оскільки виявилось, що результати основних турів не дозволили повністю сформувати команду, то для претендентів на останню вакансію у складі команди Києва довелось провести додатковий тур. Традиційно, крім учнів на відбори запрошують чотири команди організаторів, кожна з яких підбирає свій комплект задач та проводить один з турів. Цього року все було не зовсім так ...

НАПИСАТИ ПРО РЕЗУЛЬТАТИ КОМАНДИ!!!!!!!!!!!!

В цій статті ми наводимо задачі чотирьох основних турів.

I тур. 31 січня 2006 р. Організатори В.Брайман, Д.Мітін

8 клас

1. У вершинах та серединах сторін квадрата ростуть дуби та берези. Чи обов'язково знайдеться прямокутний трикутник, в усіх вершинах якого дерева однакові?
(В.Брайман)
2. Довести, що існує нескінченно багато пар цілих чисел a, b , таких, що $a^3 + 1$ ділиться на b та $b^3 + 1$ ділиться на a .
(В.Брайман)
3. На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника $\triangle ABC$ відмітили точки D та E такі, що $\angle DCE = 45^\circ$, $AD = 8$ та $BE = 9$. Знайти AB .
4. Двоє гравців по черзі називають натуральні числа, менші за 10^4 , так, щоб сума цифр кожного числа, починаючи з другого, була дільником попереднього числа. Програє той, хто змушений повторити вже назване число. Чи має хтось з гравців виграну стратегію? Якщо має, то хто?
(В.Брайман)

9 клас

1. На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника $\triangle ABC$ відмітили точки D та E такі, що $\angle DCE = 45^\circ$, $AD = 3$ та $AE = 8$. Знайти AB .
2. Див. задачу 8.4.
3. Нехай a, b, c — додатні числа такі, що $a + b + c = 1$. Довести нерівність
$$a\sqrt{1+b-c} + b\sqrt{1+c-a} + c\sqrt{1+a-b} \leq 1.$$
4. Довести, що існує нескінченно багато пар цілих чисел a, b , таких, що $a^2 + 1$ ділиться на b та $b^2 + 1$ ділиться на a .
(В.Брайман)

10 клас

1. Нехай a, b, c — додатні числа такі, що $a + b + c = 1$. Довести нерівність

$$a\sqrt[5]{1+b-c} + b\sqrt[5]{1+c-a} + c\sqrt[5]{1+a-b} \leq 1.$$

2. Опускний N -кутник розбили діагоналями на $N - 2$ трикутники. Назвемо трикутник розбиття зовнішнім, якщо дві його сторони є сторонами N -кутника, та внутрішнім, якщо таких сторін взагалі немає. Довести, що зовнішніх трикутників завжди рівно на два більше, ніж внутрішніх. (Т.Тимошкевич)

3. Нехай $ABCD$ — трапеція, коло ω_1 з центром O_1 вписане в трикутник $\triangle ABD$, а коло ω_2 з центром O_2 дотикається сторони CD та продовжень сторін BC і BD трикутника $\triangle BCD$, причому $AD \parallel O_1O_2 \parallel BC$. Довести, що $AC = O_1O_2$.

(В.Ясінський)

4. Див. задачу 9.4.

11 клас

1. Див. задачу 10.2.

2. Див. задачу 10.3.

3. Для довільних чисел $a, b, c \geq 0$ довести нерівність

$$\sqrt{a^4 + \frac{b^4}{2} + \frac{c^4}{2}} + \sqrt{b^4 + \frac{c^4}{2} + \frac{a^4}{2}} + \sqrt{c^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{b^4}{2}} \geq \sqrt{a^4 + b^3c} + \sqrt{b^4 + c^3a} + \sqrt{c^4 + a^3b}.$$

(О.Рибак)

4. Довести, що існує нескінченно багато пар цілих чисел a, b таких, що $a^{2006} + 1$ ділиться на b та $b^{2006} + 1$ ділиться на a . (В.Брайман)

II тур. 3 лютого 2006 р.

Організатори А.Батоговський, В.Брайман, К.Лужевська, Д.Мітін,
Л.Хоменко

8 клас

1. На дошці написані числа $2 - \sqrt{2}$, 1 та $2\sqrt{2} + 3$. Дозволяється замінити довільні числа a та b на числа $\frac{a+b}{2}$ та \sqrt{ab} . Чи можна за декілька таких замінів отримати на дошці числа $\sqrt{2} - 1$, 2 та $3\sqrt{2} + 2$?

2. Чи існує натуральне число, яке ділиться на 2006 та в десятковому записі якого кожна з цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 зустрічається хоча б по 100 разів?

3. Навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. На сторонах AB та AD відмітили точки P та Q відповідно так, що $AP = CD$ та $AQ = BC$. Нехай N — середина BD . Довести, що $PQ = 2CN$.

4. В компанії з $2N$ хлопчиків та 6 дівчаток для кожної пари дівчаток рівно N хлопчиків знайомі з однією з них та не знайомі з іншою. Довести, що кількість хлопчиків, знайомих з усіма дівчатами, не перевищує $\frac{N}{3}$. (О.Клурман)

9 клас

1. Див. задачу 8.2.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 2\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 2\sqrt{10}. \end{cases}$$

(В.Ясінський)

3. Див. задачу 8.4.

4. На колі ω вибрали точки A, B, C та D так, що дотичні до кола ω в точках A та B та пряма CD перетинаються в точці K . На прямих AC та AD вибрали точки E та F відповідно так, що пряма EF проходить через точку B та $EF \parallel KA$. Довести, що $BE = BF$.

10 клас

1. Див. задачу 9.2.

2. В послідовності натуральних чисел кожне наступне число утворюється з попереднього додаванням його найбільшого дільника, який є квадратом. Наприклад, після 20 має йти $20 + 4 = 24$. Довести, що якщо жодне число в послідовності не ділиться на 2006^2 , то лише скінченна кількість чисел послідовності може ділитись на 2006.

3. Див. задачу 9.4.

4. В компанії з $2N$ хлопчиків та 2005 дівчаток для кожної пари дівчаток рівно N хлопчиків знайомі з однією з них та не знайомі з іншою. Довести, що кількість хлопчиків, знайомих з усіма дівчатами, не перевищує $\frac{N}{1003}$.

(О.Клурман)

11 клас

1. Див. задачу 10.2.

2. Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник $\triangle ABC$. Прямі AI , BI та CI перетинають коло ω , описане навколо трикутника $\triangle ABC$, вдруге в точках D , E та F відповідно. Нехай DK — діаметр кола ω та N — точка перетину KI з EF . Довести, що $KN = IN$.

(Т.Тимошкевич)

3. Див. задачу 10.4.

4. Для яких натуральних чисел $n \geq 2$ існує многочлен

$$f(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

де $\{a_1, \dots, a_n\}$ — деяка перестановка чисел $\{1, \dots, n\}$, який має $n - 1$ дійсних коренів?

III тур. 7 лютого 2006 р.

Організатор Б.Рубльов

8 клас

1. Двоє гравців по черзі записують в 24 клітинки поверхні куба числа $1, 2, \dots, 24$ (кожне число записується рівно один раз). Другий гравець перемагає, якщо суми чисел в клітинках кожного кільця з 8 клітинок, яке обмотує куб, є однаковими, інакше перемагає перший гравець. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

(В.Ясінський)

2. На площині задана пряма, на якій вибрані $2n$ точок. Ще n точок вибрані поза цією прямою. Чи завжди можна побудувати n трикутників без спільних точок з вершинами в заданих точках?

(Б.Рубльов)

3. Знайти усі прості числа p , при яких число $\sqrt{5^p + 4p^4}$ є цілим.

(В.Ясінський)

4. У племені Мумбо-Юмбо кожне слово записується десятима буквами, кожна з яких “М” або “Ю”. Два слова є синонімами, якщо одне з них можна отримати з іншого за допомогою таких операцій: зі слова викреслюється декілька букв, які йдуть поспіль та серед яких парна кількість букв “М”, і на їх місце записують викреслені букви у зворотному порядку. Знайдіть максимальну кількість різних слів племені, серед яких немає синонімів. (В.Ясінський)

9 клас

1. Розглянемо трикутник ABC і точку D , що належить стороні BC . Позначимо P, Q точки перетину висот трикутників ABD та ADC . Для яких точок D трикутники ABC і DPQ є подібними? (Б.Рубльов)

2. Див. задачу 8.3.

3. Нехай a, b, c — попарно різні додатні дійсні числа. Доведіть, що рівняння

$$(a + b + c)x^2 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)x + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

має два різні дійсні корені. (В.Ясінський)

4. Див. задачу 8.4.

10 клас

1. Див. задачу 9.3.

2. Про натуральне число $n > 1$ та просте число p відомо, що $p - 1$ ділиться на n і $n^3 - 1$ ділиться на p . Доведіть, що число $\sqrt{4p - 3}$ є цілим. (В.Ясінський)

3. Див. задачу 8.4.

4. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний в коло, $AC \parallel DE$ і M — середина діагоналі BD . Довести, що якщо $\angle AMB = \angle BMC$, то пряма BE ділить діагональ AC навпіл. (В.Ясінський)

11 клас

1. Довести, що для двох довільних трикутників зі сторонами a, b, c та x, y, z відповідно виконується нерівність

$$a^2(by + cz - ax) + b^2(cz + ax - by) + c^2(ax + by - cz) > 0.$$

(О.Крижановський)

2. Див. задачу 10.2.

3. Див. задачу 8.4.

4. Див. задачу 10.4.

IV тур. 14 лютого 2006 р.
Організатори В.Брайман, Д.Мітін, С.Торба

8 клас

1. В країні є 2006 міст, деякі з яких сполучено авіарейсами. Відомо, що всього є 1000000 авіарейсів. Чи обов'язково знайдуться три міста, кожен з яких сполучено авіарейсом?

2. Яку найбільшу кількість зображених фігурок можна вирізати з квадратної дошки 8×8 ? Фігурки можна як завгодно повертати.



(В.Брайман)

3. Знайти всі натуральні числа n та прості числа p, q такі, що

$$p(p+3) + q(q+3) = n(n+3).$$

4. Нехай O — середина сторони AB трикутника $\triangle ABL$. Серединні перпендикуляри, проведені до відрізків AO та BL , перетинаються в точці V , а серединні перпендикуляри, проведені до відрізків AL та BO , перетинаються в точці E . Довести, що $LO \perp VE$.

9 клас

1. Див. задачу 8.2.

2. Функція f визначена на множині натуральних чисел та набуває цілі невід'ємні значення, причому $f(p) = 1$ для кожного простого числа p та $f(ab) = af(b) + bf(a)$ для довільних натуральних чисел a, b . Знайти всі натуральні числа n , при яких $f(n) = n$.

3. Див. задачу 8.4.

4. Для довільних невід'ємних чисел x, y, z довести нерівність

$$3(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) \geq 4(x^2y + y^2z + z^2x).$$

10 клас

1. Див. задачу 9.2.

2. На продовженні сторони BC трикутника $\triangle ABC$ за точку B відклали відрізок $DB = AB$. Нехай M — середина відрізка AC , а P — точка перетину DM з бісектрисою кута $\angle ABC$. Довести, що $\angle BAP = \angle BCA$.

3. Див. задачу 9.4.

4. Знайти кількість прямих, які перетинають деякі дві сторони даного правильного трикутника та вписане в нього коло послідовно в точках L, O, V, E , причому $LO = OV = VE$.

(В.Брайман)

11 клас

1. Див. задачу 10.2.

2. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{2006}$ — деякі цілі числа з інтервалу $[-1003, 1003]$, причому $a_1 + a_2 + \dots + a_{2006} = 1$. Чи завжди можна вибрати одне чи декілька з цих чисел так, щоб їх сума дорівнювала нулю?

3. Див. задачу 10.4.

4. Для довільних невід'ємних чисел a, b, c довести нерівність

$$ab + bc + ac + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{4}{3}(a\sqrt[3]{b^2c} + b\sqrt[3]{c^2a} + c\sqrt[3]{a^2b}).$$